

無断使用をお断りします。日科技連出版社

改訂版

幾何の はなし

●論理的思考のトレーニング

大村 平 著



日科技連

まえがき

幾何学は、人類にとって最大の知的財産であるといわれます。それもそのはず、「ある点からある点へ直線を引くことができる」とか「すべての直角は互いに等しい」など、だれでも同意できるような数項目の前提だけを使って、「だから、二等辺三角形の底角どうしは等しい」、「だから、与えられた線分を2等分することができる」など、あたりまえとも思える定理をつぎつぎに作り出し、つづいて、これらの定理を組み合わせて「三平方の定理」、「2角夾辺きょうの合同定理」などに発展させ、それらの上にち密で整然とした壮大な幾何学が築き上げられているのです。

これらの理論構築の過程には主観や仮説がはいり込む隙間は寸分もありません。科学というものの真髄が「論理的に証明されていて、いつ、どこで、だれが試しても同じ結果になる」ことであるなら、科学的という意味では幾何の右に出るものはないでしょう。だから、幾何学は人類にとって最大の知的財産の名に恥じないのです。

こういうわけですから、幾何学は論理的思考の訓練に適しているとの意見も多く、ノーベル賞を受賞された故福井謙一博士も教育に関する審議会で、学校教育でもっと幾何を重視するべきだと主張しておられたと聞きます。これに対して、幾何のおもしろさを理解するまでには相当の努力を要し、いまの子供(大人も?)にその辛抱を要求するの

iv

は無理，という反論もあるそうです。

どちらももっともだと，教育現場をまったく知らない私でさえ思います。それなら，その両方に対応できるような幾何の本があればいいに決まっています。つまり，あまり辛抱しなくても幾何が楽しめる本が望まれていると思うのです。そういえば近年になって，図形のおもしろさを前面に出した本が目につくようになりました。しかし，あれは図形のおもしろさであって幾何のおもしろさではありません。

そこで，幾何の本を，その論理の流れはきちんと保ったまま，物語ふうを書いてみることにしました。ほんとうは，起承転結があつて心がときめくような小説ふうには書けるといいのですが，私にはそれだけの力がありません。章だてなどは平凡なものになってしまいそうですが，初心だけは忘れずに書き上げるつもりです。出来映えについては存分にご批判を賜りたいと存じます。

なお，「はなしシリーズ」の数学の分野の中で，いくつかの理由があつて「幾何」だけが取り残されてきました。今回，そこを埋めることができて，私としても充足感を味わっています。30年も昔にスタートした「はなしシリーズ」の今日があるのも，数多くの読者の方々からいただく暖い励ましのお言葉と，非才な私に出版の機会を与えてくださる日科技連出版社の方々と，なかでも，30年にわたって喜びと苦しみを分かち合ってくれた山口忠夫部長のおかげと，心から感謝しています。

平成 11 年 7 月

大 村 平

この本の初版が出版されたのは1999年の9月のことです。はなしシリーズの書き下ろしの中では比較的新しいものと思っていましたが、気がついてみたら、20年余りの歳月を重ねていました。その間に、幾何学を取り巻く情勢はずいぶんと変化したようで、用語なども当時と変わっています。そこで、そのような部分を改訂させていただきます。

もっとも、幾何学の基礎を築いたユークリッドは紀元前300年ぐらいの人ですから、その歴史から考えると20年ぐらいは大した歳月ではないのかもしれませんが。

はなしシリーズの改訂版も、この本で24冊を数えるまでになり、改訂版の歴史も20年近くになりました。それもこれも、いままで、思いもかけないほど多くの方々にお読みいただききたお陰です。このシリーズが、いままで以上に多くの方のお役に立てるなら、これに過ぎる喜びはありません。

なお、改訂にあたっては、煩雑な作業を出版社の立場から支えてくれた、塩田峰久取締役に深くお礼申し上げます。

令和3年4月

大村 平

目 次

まえがき	iii
------------	-----

第 I 部 初等幾何に目を通す

1. 交わらない平行線——交わる平行線もあるか	3
初等幾何ことはじめ	3
日常感覚にマッチする幾何	7
ユークリッド幾何の誕生	10
そして、多くの定理が誕生	14
2. 三角形が図形の基本——ロバが橋を渡る	20
三角形の決定条件	20
なぜ、定規とコンパスか	25
三角形の辺と角	30
三平方の定理	37
三角形を彩る 3 本の線	43
三角形の 5 つの心	49

3. 合同から相似へ——究極の幾何への登山口	56
合同, 相似, そして.....	56
まず, 合同のおさらい	59
相似への誘い	64
三角形などの相似	68
4. 四角形から多角形へ——2つの凹角をもつ五角形を描け	73
四角形の序列	73
四角形の決定条件と合同・相似	77
四角形の内角と外角	81
四角形にまつわる性質	83
平行四辺形の成り立ち	86
平行四辺形の余形の定理	89
平行四辺形をめぐる	92
多角形の内角・外角の和	96
正 n 角形を作図する	99
5. 円をめぐる——たかが丸というけれど	104
2とおりの円	104
中心角と弦や弧の大きさ	107
円周角がポイント	111
円と直線のからみ合い	116
円と円とのからみ合い	121

6. 軌跡から立体図形へ——静から動へ，平面から立体へ…… 125
- 軌跡を追って 125
 - 軌跡を推理して証明する 129
 - 軌跡から図形へ 136
 - 立体の幾何学 140
7. 幾何で有名な定理など——メネったり，チェバったり…… 144
- 三平方の定理こぼれ話 144
 - メネラウスの定理 150
 - チェバの定理 153
 - デザルグの定理 160
 - シムソンの定理 163
 - トレミーの定理 165
 - 補助線ひらめき術 167
 - 幾何の試算と検算 172

第Ⅱ部 いろいろな幾何と出会う

8. 解析幾何の粗描——解析幾何には美がない？ …………… 181
- 座標を使って幾何を解く 181
 - ご存知のとおりですが 185
 - 3つの例題 191
 - ベクトルという名の小道具 198
 - 7点一致の物語 203

x

9. ^{トポロジー}位相幾何への誘い——ドーナツはポットに化けるか…………… 207
- 同相への誘い 207
 - グラフ理論の原理 209
 - 正多面体が5種類しかないわけ 216
 - 曲面の同相を見てください 220
 - オイラー標数という基準 223
 - オイラー・マクローリンの公式 227
 - とんだ変り者たち 232
10. 非ユークリッド幾何のあらまし
——曲がっているのはへそだけじゃない…………… 235
- 球面の上で幾何が成り立つか 235
 - 非ユークリッド幾何の誕生 240
 - リーマン幾何学 245
 - 双曲幾何学 249
 - 宇宙へ伸びる幾何学 256
11. 射影幾何の玄関先——王座陥落、古典幾何へ…………… 259
- 空間のデザルグの定理 259
 - 射影幾何の基本定理 262
 - アフィン幾何は射影幾何への一里塚 268
 - パスカルの定理もどき 272
 - 射影幾何も古典幾何の仲間入り 277

2. 三角形が図形の基本

—— ロバが橋を渡る ——

三角形の決定条件

私ごとで恐縮です。私が居住していた敷地は三方が道路に面して
いて開放感はバツグンなのですが、変な恰好をしていました。登記

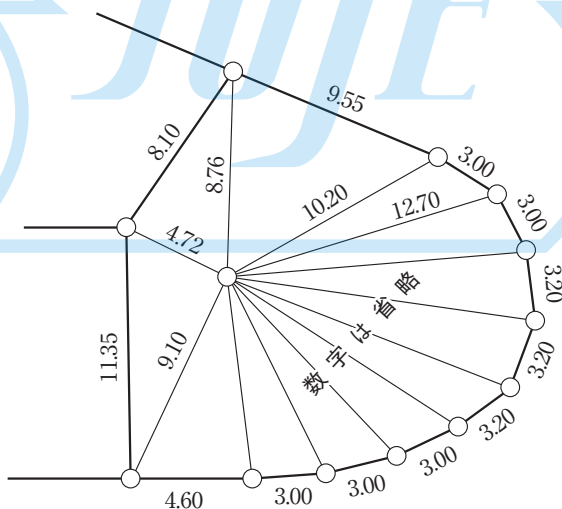
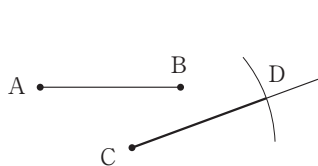
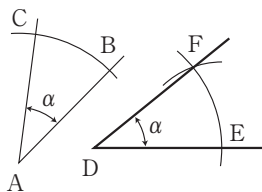


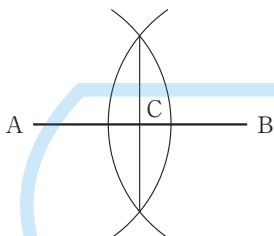
図 2.1 どうして、こうするの？



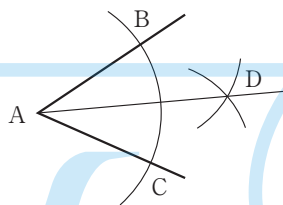
(2) 長さを移す



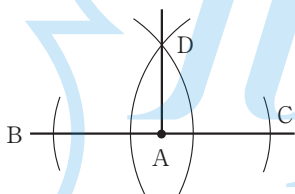
(3) 角を移す



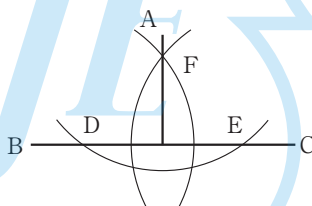
(4) 線分を2等分する



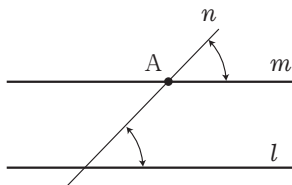
(5) 角を2等分する



(6) A から垂線を立てる



(7) A から垂線を下ろす



(8) A 点から l に平行線を引く

図 2.5 作図の基本

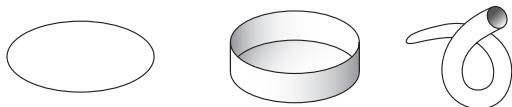
曲面の同相を見てください

前節までは、点と線のつながり方だけを観察してきました。正多面体の面なども取り扱いましたが、それは点と線で囲まれた閉領域を考えただけであり、面として取り扱ったわけではありません。まさに、グラフ理論の基礎のご紹介にすぎませんでした。

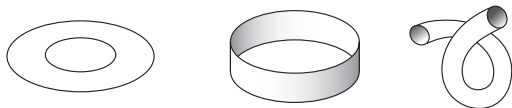
そこで、こんどは面の連なり方に目を移していこうと思います。まず、図 9.7 の(a)をごらんください。いちばん左には、厚さがなく丸い平面が描いてあります。もちろん、曲げたり折ったり伸ばしたり縮めたりすることが自由にできます。この平面を切ったり貼ったりすることなしに中央を凹ませて整形すると、洗面器のような形にできますし、さらに深く凹ませていくと、先端が閉じたパイプになるでしょう。だから、この3つの図形は同相です。

(b)には、中央に孔があいた厚さのないCDのような図が描いてあります。トポロジーでは、このような図形をラテン語で小さい環を意味するアニュラスと呼んでいます。切ったり貼ったりの破壊行為をすることなくアニュラスを変形していくと、料理で使うセルクルや両端が開いたパイプができますから、これらは同相です。

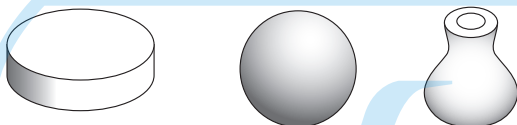
(c)には厚みのある円板が描いてあるように見えますが、そうではありません。円板の中はからであり、円板の表皮だけの閉曲面を描いたつもりです。この円板の中に空気を送り込んでふくらませると、球(表皮だけ)になります。また、円板の厚さを保ったまま中央を凹ませていくと、厚さのある洗面器の形を経て、図のような花瓶ができます。だから、これらは似ても似つかないけれど、同相なのです。なお、この花瓶には内壁と外壁だけがあって、ふつう



(a) 平面と同相



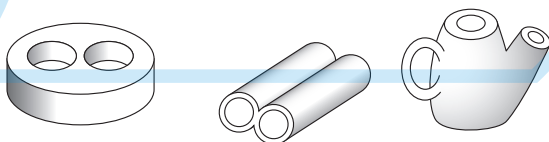
(b) アニュラスと同相



(c) 球面と同相



(d) トーラスと同相



(e) 豚鼻スライス面と同相

図 9.7 同相の仲間たち

ならガラスなどの素材が詰っている部分がからであることにご注意
 ください。ついでに、(a)と(b)とは開いた曲面であったのに、(c)

無断使用をお断りします。日科技連出版社

著者紹介

おおむら ひとし
大村 平 (工学博士)

- 1930年 秋田県に生まれる
1953年 東京工業大学機械工学科卒業
防衛庁空幕技術部長, 航空実験団司令,
西部航空方面隊司令官, 航空幕僚長を歴任
1987年 退官. その後, 防衛庁技術研究本部技術顧問,
お茶の水女子大学非常勤講師, 日本電気株式会社顧問,
(社)日本航空宇宙工業会顧問などを歴任

幾何のはなし【改訂版】
—論理的思考のトレーニング—

1999年9月19日 第1刷発行
2005年6月7日 第3刷発行
2021年8月30日 改訂版第1刷発行

著者 大村 平
発行人 戸羽 節文

検 印
省 略

発行所 株式会社 日科技連出版社

〒151-0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷5-15-5
DSビル
電 話 出版 03-5379-1244
営業 03-5379-1238

Printed in Japan

印刷・製本 河北印刷株式会社

© Hitoshi Ohmura 1999, 2021
URL <https://www.juse-p.co.jp/>

ISBN 978-4-8171-9739-9

本書の全部または一部を無断でコピー、スキャン、デジタル化などの複製をすることは著作権法上での例外を除き禁じられています。本書を代行業者等の第三者に依頼してスキャンやデジタル化することは、たとえ個人や家庭内での利用でも著作権法違反です。