

無断使用をお断りします。日科技連出版社

改訂版

# 数の話

●数の性質をさぐる

大村 平 著



日科技連

## まえがき

‘まえがき’は、文字どおり前書きですから、本文を書き始める前に書くのがほんとうだろうと思います。けれども、この‘まえがき’は本文が完結したあとで書いています。本文の内容が、書き始める前の志とはかなり異なったものになってしまったからです。

この本は「数のはなし」です。関数、微積分、行列とベクトル、確率、統計など12冊に及ぶシリーズの中に位置づけられた「数のはなし」です。したがって、数学のあらゆる分野に共通な基礎としての数の性質を解説するのが目的ですから、本文を書き始める前には、なるべく応用動作にはしらず数の本質的な性質についてだけみっちり書こうと志していました。

ちょうど、あらゆるスポーツに共通な基礎作りはランニングであり、へんな色気を出して応用動作にはしることなく、みっちりランニングで足腰を鍛えることがスポーツ選手として成功するための正道と心得て、わき目もふらずにランニングに励むように、です。

そのためには、整数、有理数、無理数の構造などの基礎的なことさらに大部分のページをさき、数をめぐる他の話題については、心残りでもなるべく簡略にしようと心に決めて本文をスタートしたのでした。

ところが、本文を書き終えてみると、どうやら単調なランニングを

iv

端折って、いくらか変化に富む応用動作のほうに多くの時間をさいてしまったようです。決してランニングを怠けたわけではありませんが、初心を曲げたことは事実です。

けれども、それには理由があります。整数、有理数、無理数の構造などは、たしかに数の性質のもっとも基本的な部分です。これなしで数のはなしがすむものでないことは言うに及びません。しかし、数学の全分野に共通な基礎として‘数’をとらえるなら、どうやら、それだけでは不十分です。とくに、12冊のシリーズにおけるただひとつの「数のはなし」であるからには、数の基礎に属することで他の11冊に含まれないものは、この本に収録しなければなりません。

そういうわけで、この本では、純粋に基礎的な数の性質のほかに、数にまつわるいくつかの話題、たとえば、ゼロと無限大を含む演算、数列と級数、近似値と有効数字などなどの話題に多くのページをさく結果になってしまいました。

そして、結果的には、これで良かったのだと思っています。これらの話題は、ランニングではないにしても腕立て伏せやうさぎ跳びなどが間違いなくあらゆるスポーツに役立つように、数学の多くの分野とかわりを持ちながら、その理解を助けること請合いだからです。

最後になりましたが、ともすれば怠けそうになる私を叱咤激励しながら「はなし」シリーズの出版を続けてくださる日科技連出版社の方、とくに山口忠夫さんにお礼を申し上げます。

昭和55年11月

大 村 平

## 改訂版発行にあたって

当社の“はなしシリーズ”をはじめ、数々の名著を残してこられた大村平先生が、2021年にご逝去されました。心よりご冥福をお祈り申し上げます。

本書の第5章に、「気を落とさないようにしなさい。見てごらん、空はなんときれいに澄んでいるのだろう。私はあそこへ行くんだよ」という、フランスの哲学者ジャン＝ジャック・ルソーの言葉が引用されています。きっと大村先生も、このルソーの言葉を心の中で呟いて、天国へ旅立って行かれたのだろうと思います。

本書は、大村先生の夫人より許可をいただき、改訂版として刊行するものです。初版から40年の歳月が過ぎ、その間の社会環境の変化などによって不自然と思われる箇所が目立つようになってきたため、そのような部分だけを改訂させていただきました。

残念ながら大村先生はご逝去されましたが、先生がかねがね気にされていたように、“はなしシリーズ”がいままで以上に多くの方のお役に立てるなら、出版社一同、これに過ぎる喜びはありません。

令和4年2月

日科技連出版社 塩田峰久

## 目 次

まえがき	iii
改訂版発行にあたって	v
<b>1. 数の世界を展望すれば</b>	<b>1</b>
なぜ、ダメなのか	1
自然数であることの証言	5
かぞえてばかりが能ではない	8
ゼロからマイナスへ	9
標識としての数もある	12
あちらこちらから、じっくり見る	14
<b>2. つぎの数はなにか——数列のはなし</b>	<b>17</b>
ご存じ、等差数列と等比数列	17
階差数列に手掛りを求めて	22
柳の下にどじょうがいるとは限らない	28
たくさんの正解に泣く	31
等比数列を加算すると	34
等差数列を加算すると	37
なし崩しの証明法	40

無限の彼方になにが待つ	45
<b>3. 発散か、収束か——級数のはなし</b>	<b>51</b>
もういちど、無限の彼方になにが待つ	51
常識で知る無限の彼方	54
数列が発散したり収束したり	58
数列の発散・収束を実地検証する	61
数列から級数へ	67
われらが友だち、級数くん	70
等比級数が収束するためには	74
小鹿の悲劇を級数で解く	79
循環小数を分数に変える法	83
級数が収束するための必要条件	84
逆かならずしも真ならず	86
級数が収束するためには	91
最後の力投	97
<b>4. それは数か状態か——ゼロと無限のはなし</b>	<b>102</b>
ゼロの発見	102
ゼロを含む計算	104
奇怪な世界‘無限’	109
無限は均一に無限か	112
もっと大きな無限がある	115
$\sqrt{2}$ はなぜ無理数か	121

<b>5. 数の貴族たち——<math>\pi</math>, <math>e</math>, <math>i</math>, etc.</b> .....	<b>125</b>
数に黄泉の国はあるか.....	<b>125</b>
$i$ のはなし.....	<b>128</b>
$\pi$ のはなし.....	<b>135</b>
$e$ のはなし.....	<b>144</b>
$n!$ のはなし.....	<b>152</b>
${}_nC_r$ のはなし.....	<b>160</b>
フィボナッチ数.....	<b>166</b>
<b>6. 数のチーム・カラー——自然数から行列まで</b> .....	<b>170</b>
整数はとびとびがとりえ.....	<b>170</b>
割りきれ判定法.....	<b>175</b>
余りものに福あり.....	<b>179</b>
なにげなく、そして重要な定理.....	<b>184</b>
素数は、いくつあるか.....	<b>188</b>
循環小数が生まれるメカニズム.....	<b>191</b>
有理数を展望すれば.....	<b>195</b>
実数の世界がわれらの常識.....	<b>198</b>
数の兄弟ぶんと兄貴ぶん.....	<b>200</b>
<b>7. 当たらずとも遠からず——近似値からトリックまで</b> .....	<b>205</b>
有効数字のはなし.....	<b>205</b>
油断のならない四捨五入.....	<b>209</b>
誤差伝播の法則.....	<b>213</b>
近似値計算のルール.....	<b>218</b>

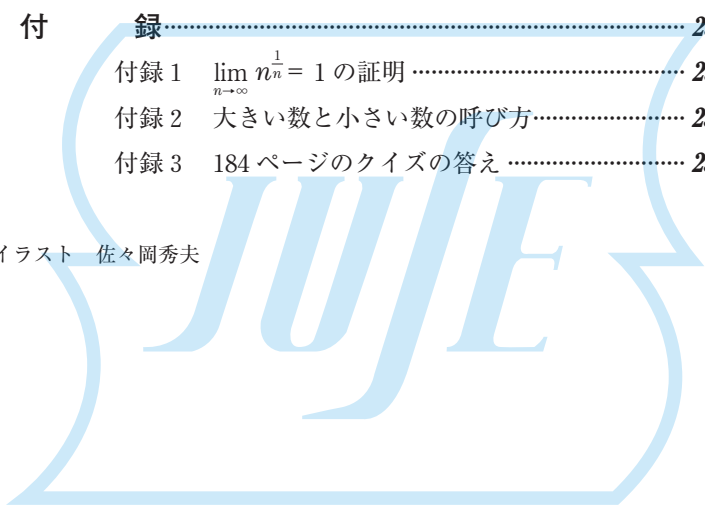
x

数字に強いということ.....	220
数字を使いこなすテクニック.....	222
0の行列を利用する法.....	225
パーセントは危険信号.....	229
数字を使ったペテン.....	231
ごあいきょう，テーマのすりかえ.....	233

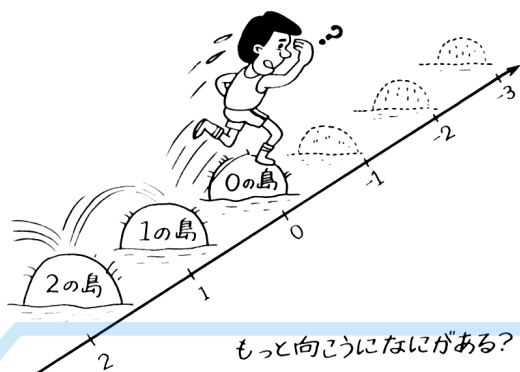
**付 録..... 235**

付録1 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1$ の証明.....	235
付録2 大きい数と小さい数の呼び方.....	236
付録3 184ページのクイズの答え.....	236

イラスト 佐々岡秀夫

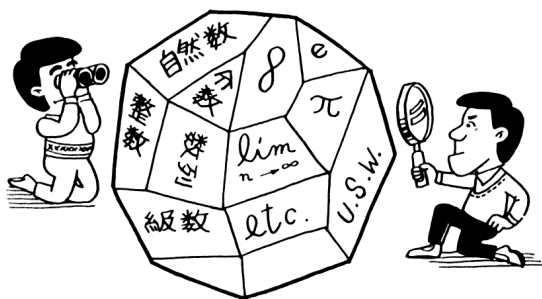






追加させていただくなら、「ひとつがいの雉と2日が、いずれも‘2’  
という抽象的な数の例であることを発見するのに、人類はきっと長い  
年月を要したことだろう。さらに、雉がそこに存在しないことも、  
日数がないことも、長さがなくとも‘ゼロ’という抽象的な  
数で表わせることを発見するには、もっともっと長い年月を要し  
たにちがいない」ということになるでしょう。

ゼロが発見されると、人類の目はマイナスのほうに向けられま  
す。1をつぎつぎに加え合わせていくと、2になり、3になり、4  
になる、……ということを知っていて、それを逆にたどって、3か  
ら1をとると2になり、2から1をとると1になり、1から1をと  
ると、あら、なくなってしまうぞと閉口していたところ、その状態  
が0という数で表わせると発見しました。それなら、0からさらに  
1をとったらどうなるか、もひとつついでに1をとったらどうなる  
かと好奇心をもやすのは、考える輩としては当然の成りゆきのよう  
に思えます。



あちらこちらから  
じっくり見る

い文章と構成力で文壇を湧かせた芥川龍之介の作品『藪の中』では、事件の渦中にあった人たちの事実に対する認識が立場によって微妙に異なる様が鋭く描かれています。

こうしてみると、真実はひとつであり、見る立場によって異なった姿になるのか、あるいは、真実の全貌はしょせん神ならぬ人間には決して見ることができず、各人の目に写った姿のひとつひとつを真実とみなさなければならないのか、私にはよくわかりません。

真実は、ひょっとすると‘ひとつ’なのかもしれないと思います。けれども、ある個人がある立場から観察している限りでは、決して真実の完全な姿を見ることはできないのでしょうか。そうであるなら、真の姿を見極めるためには、できる限り多くの異なった方向から、じっくり観察する必要があります。さもないと、「群盲象をなでる」のたとえのように、本質を理解することはできないでしょう。

私たちは、数学全般に共通する基礎ともいえる数の性質を見極めようとしています。したがって、‘数’をいろいろな角度、それも

討ちされて餌食になってしまいます。

さて、哀れな小鹿はA地点でライオンに遭遇してから落命するまでなん分かかるのでしょうか。A地点とB地点の距離は5000m、小鹿の速さは4000m/分、ライオンの速さは2匹とも1000m/分とします。

図3.3を見ながら考えてください。A地点をライオンAと同時に

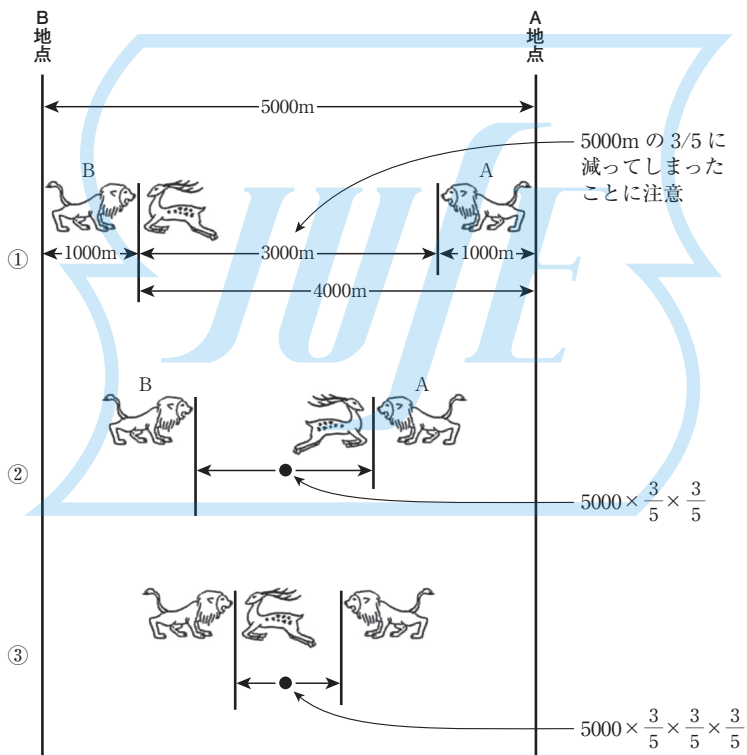


図3.3 ライオンに挟撃された小鹿の運命やいかに

そう考えれば矛盾が矛盾でなくなるどころが、おとなの数学のおもしろさでしょうか。

## 実数の世界がわれらの常識

整数、有理数と取り扱う数の範囲がだんだんと広がって、やっと実数にまでたどりつきました。ここまでくれば、一安心です。なにしろ、現世の数はすべて実数の世界に所属しているのですから……。

実数は、すでになんべんも書いてきたように、有理数と無理数とから成りたっています。無理数は、ムリな数だなどとけしからんことを前に書きましたが、決してムリな数ではありません。ただ、有理数ではないというだけの話です。その証拠に、無理数は誰にでも容易に作り出せます。

無理数は決して循環することのない無限小数ですが、0から9までのたった10種類の数字で、無限の彼方まで決して循環しないことが保証されている小数を作り出すことは、非常にむずかしいと思われるかもしれませんが、たとえば、つぎのようにやればいいのです。

0.1010010001000010000010……

1にはさまれる0の個数が1個、2個、3個、……と1つつつふえていくだけのことですが、これなら無限の彼方までいっても循環する心配はいりません。この手の無理数なら、いくつでも容易に作り出せるではありませんか。

このような無理数が有理数のすき間をべったりと埋めつくしてく



JUSE

彼女は美しい，だから男がいい寄るのは当然だ。  
彼女は女だ，だから口説きおとされぬはずはない。

——シェイクスピア

数学はいかめしい，だから

誰でもとりつきにくいのは当然だ。

数学は真実だ，だから腑におちないわけがない。

——H・O

無断使用をお断りします。日科技連出版社

著者紹介

おおむら ひとし  
大村 平 (工学博士)

- 1930年 秋田県に生まれる  
1953年 東京工業大学機械工学科卒業  
防衛庁空幕技術部長, 航空実験団司令,  
西部航空方面隊司令官, 航空幕僚長を歴任  
1987年 退官. その後, 防衛庁技術研究本部技術顧問,  
お茶の水女子大学非常勤講師, 日本電気株式会社顧問  
2021年 逝去

すう  
数のはなし【改訂版】  
—数の性質をさぐる—

1981年1月9日 第1刷発行  
2000年2月10日 第8刷発行  
2022年3月24日 改訂版 第1刷発行

著者 大村 平  
発行人 戸羽 節文

発行所 株式会社 日科技連出版社

〒151-0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷5-15-5  
DSビル  
電話 出版 03-5379-1244  
営業 03-5379-1238

検 印  
省 略

Printed in Japan

印刷・製本 河北印刷株式会社

© Michiko Ohmura 1981, 2022  
URL <https://www.juse-p.co.jp/>

ISBN 978-4-8171-9754-2

本書の全部または一部を無断でコピー、スキャン、デジタル化などの複製をすることは著作権法上での例外を除き禁じられています。本書を代行業者等の第三者に依頼してスキャンやデジタル化することは、たとえ個人や家庭内での利用でも著作権法違反です。